Leçon 203 - Utilisation de la notion de compacité.

Cadre : (X, d) est un espace métrique.

1. Généralités. —

1. Définitions et caractérisations de la compacité. —

- Def : (X, d) est compact si de tout recouvrement de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- Ex : Tout espace métrique fini est compact.
- Contre-ex : $\mathbb{R}$ n'est pas compact car $\mathbb{R} = \cup_n]-n, n]$.
- Ex : Les segments $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ sont compacts.
- Pro : Les espaces compacts sont bornés : $sup_{x,y\in X}(d(x, y)) < +\infty$.
- Pro : Pour (X, d) compact, une partie $A \subset X$ est compacte ssi elle est fermée.
- Pro : L'intersection quelconque de parties compactes est compacte.
  La réunion finie de parties compactes est compacte.
  Un produit fini de compacts est compact.
- Pro : Les espaces compacts vérifient la propriété des segments emboîtés : Pour $(F_n)_n$ suite décroissante de fermés bornés non-vides, $\cap_n F_n \neq \emptyset$.
- Thm : Premier théorème de Dini : Pour (X, d) compact et $f_n : X \to \mathbb{R}$ suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers f continue, alors f_n converge uniformément vers f sur X.

2. Théorème de Bolzano-Weierstrass et conséquences. —

- Théorème de Bolzano-Weierstrass : Un espace métrique est compact ssi de toute suite de points on peut extraire une suite convergente.
- Pro : Un sous-ensemble infini d'un compact possède un point d'accumulation.
- Pro : Compact $\Rightarrow$ Complet, car une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente.
- App : Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.
- Rem : Une partie compacte de $\mathbb{R}$ n'est pas forcément une réunion finie de segments. L'ensemble de Cantor est un compact de $\mathbb{R}$, par exemple.
- Pro : Une suite dans un compact est convergente ssi elle possède au plus une valeur d'adhérence.
- Thm : Pour $f : X \to Y$ avec $(X, d), (Y, d')$ compacts, f est continue ssi son graphe $\{(x, f(x)\}$ est fermé dans $X \times Y$.
- App : Une suite $(x_n)_n \in \mathbb{R}$ est convergente ssi $(e^{itx_n})_n$ est convergente.
- Pro : Tout intervalle de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la réunion dénombrable croissante d'intervalles fermés bornés.
- Thm : Si X est compact, alors $(C^0(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est complet.
- Def : Une partie $A \subset X$ est dite relativement compacte si $\overline{A}$ est compacte.
- Théorème d'extraction diagonale : Pour tout $x \geq 0$, soit X_n un espace compact et $(x_{n,k})_k$ une suite à valeurs dans X_n.
  Alors il existe une extraction φ telle que pour tout $n \geq 0$, $(x_{n,\varphi(k)})$ converge dans X_n.
- App : Théorème de Tychonov dénombrable : Un produit dénombrable d'espace métriques compacts est compact.
- App : L'application f qui à $(u_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ envoie $\sum_n \frac{2.u_n}{3^{n+1}} \in \mathbb{R}$ est un homéomorphisme entre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et l'ensemble triadique de Cantor.

2. Fonctions continues sur un compact. —

1. Compacité et extrema. —

- Thm : L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.
- Contre-ex : $sin^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$.
- Thm : Pour (X, d) compact et $f : X \to Y$ bijection continue, f est un homéomorphisme.
- Thm : Pour X compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue, f est bornée et atteint ses bornes.
- App : Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.
- Contre-ex : Sur $\mathbb{R}[X]$, $\|.\|_{L^1([0,2])}$ n'est pas équivalente à $\|.\|_{L^\infty([0,1])}$.
- Cor : Toute application linéaire d'un evn de dim finie dans un evn est continue.
- Cor : Tout evn de dim finie est complet.
- Cor : Tout s-ev de dim finie d'un evn est fermé.
- Cor : Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$,$\mathbb{C}^n$ sont les fermés bornés pour une certaine norme.
- **Dev** : L'exponentielle de matrice $exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
- App : Théorème des valeurs intermédiaires : Pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, $f([a, b])$ est un intervalle.
- App : Théorème de Rolle : Pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b) = 0$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- App : Théorème des accroissements finis. Pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- Théorème de Darboux : Pour $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $f'(I)$ est un intervalle.
- App : Majoration de l'erreur dans des méthodes usuelles de quadrature.
- Pro : Si $C \subset \mathbb{R}^n$ est non-bornée, alors toute $f : C \to \mathbb{R}$ continue et coercive est minorée et atteint son minimum.
- Ex : Pour K un compact et F un fermé de $\mathbb{R}^n$ disjoints, il existe $x \in K$ tel que $d(x, F) = d(K, F)$.

2. Théorème de Heine. —

- Théorème de Heine : Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.
- Ex : Les fonctions continues périodiques sur $\mathbb{R}$ sont uniformément continues.
- App : Les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ayant une limite finie en $\pm\infty$ sont uniformément continues.

- Pour E un evn, toute fonction $f:[a,b]\to E$ continue est limite uniforme de fonctions affines par morceaux.
- Second théorème de Dini : Soit $f_n:[a,b]\to E$ une suite de fonctions continues croissantes qui converge simplement vers f continue. Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.
- Contre-ex : $f_n : x\in[0,1]\mapsto x^n$ est une suite croissante de fonctions continues croissantes, mais ne converge pas vers une fonction continue. La convergence n'est dont pas uniforme.
- App : Théorème de Glivenko-Cantelli.

3. Théorèmes de point fixe. —

- Thm : Soit (X,d) compact et $f:X\to X$ telle que $d(f(x),f(y))<d(x,y)$. Alors f admet un unique point fixe a et pour tout $x_0\in X$, la suite définie par $u_0=x_0$ $u_{n+1}=f(u_n)$ converge vers a.
- Ex : La fonction $f:x\in[-\pi,\pi]\mapsto sin(x)\in[-1,1]$ possède un unique point fixe, en l'occurrence 0.
- Contre-ex : Pour $X=\mathbb{R}$ et f donnée par : $f(x)=1$ si $x<0$, $f(x)=x+\frac{1}{1+x}$ si $x>0$, f est 1-Lipschitzienne mais $f(x)>x\ \forall x\in\mathbb{R}$.
- Thm : Soit (X,d) compact et $f:X\to X$ telle que $d(f(x),f(y))\geq d(x,y)$. Alors f est une isométrie bijective sur X.
  Si $f:X\to X$ est bijective et véfifie $d(f(x),f(y))\geq d(x,y)$, alors f est une isométrie bijective sur X.
- Théorème de Brouwer : Une fonction $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ continue possède au moins un point fixe.

4. Théorème de Stone-Weierstrass. —

- Def : Partie séparante
- Def : Partie réticulée
- Théorème de Stone-Weierstrass .
- Exemple des fonctions Lipschitziennes.
- Exemple des fonctions polynômiales.
- **Dev** : Théorème de Weierstrass : Pour $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue on définit $B_n(x)=\sum_k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f(\frac{k}{n})$ le n-ième polynôme de Bernstein.
  Alors B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$, et in existe $C>0$ telle que $\|f-B_n\|_\infty\leq C.w(\frac{1}{\sqrt{n}})$, où $w(h)=sup\{|f(x)-f(y)|,\ |x-y|\leq h\}$ est le module d'uniforme continuité de f.
- App : On a ainsi une suite explicite de polynômes convergeant uniformément vers f et dont on a minoré la vitesse de convergence.
- App : Si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue vérifie $\int_0^1 f(t)^n dt=0\ \forall n$, alors $f\equiv 0$.
- Contre-exemple de Weierstrass défini sur $\mathbb{R}$ tout entier qui dit que la limite uniforme d'une suite de polynômes sur $\mathbb{R}$ est un polynôme.
- Def : Partie auto-conjuguée.
- Pro : Cas complexe.
- App : La famille des $(e_n)_n$ est une base topologique des fonctions 2π-périodiques, donc une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.
- Conséquence : Les propriétés principales de convergence de la série de Fourier d'une fonction.

3. Compacité en dimension infinie. —

- Rem : Les fermés bornés d'un evn de dimension infinie ne sont pas forcément compacts.
- Contre-ex : La boule fermée de centre la fonction nulle et de rayon 1 dans $(C^0([0,1]),\|.\|_\infty)$
- Théorème de Riesz : La boule unité d'un evn est compacte ssi la dimension de l'evn est finie.
- Théorème d'Ascoli : Soit K un espace compact et (X,d) un espace métrique. On munit l'espace $C^0(K,E)$ de $\|.\|_\infty$ la norme uniforme.
  Une partie $A\subset C^0(K,E)$ est relativement compacte ssi elle est bornée et équicontinue en tout $x\in K$.
- App : Théorème de Montel : De toute suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω qui est bornée sur tout compact de Ω, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de Ω.
- Def : Pour H un espace de Hilbert, on dit que $(x_n)_n$ converge faiblement si $\forall y\in H$, $(<x_n,y>)_n$ est convergente.
- Pro : Une suite faiblement convergente possède une unique limite faible. Une suite convergente est faiblement convergente. Une suite faiblement convergente possède au plus une valeur d'adhérence.
- Ex : Dans $l^2(\mathbb{N})$, la suite $(e_n)_n$ est faiblement convergente vers 0.
- Thm : Les fermés bornés d'un espace de Hilbert sont faiblement compacts : De toute suite on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.
- Rem : La notion de convergence faible vient compléter la notion de convergence dans le cas Hilbertien, et permet de retrouver certains résultats liés à de la compacité.
- App : Pour H un Hilbert, $C\subset H$ non-bornée, et $f:C\to\mathbb{R}$ continue, convexe, coercive ($f(x)\to_{\|x\|\to+\infty}+\infty$), f admet un minimum global, et celui-ci est atteint.

Références

Gourdon : Espaces compacts, Bolzano-Weierstrass. Fonction continue sur un compact, équivalence des normes en dimension finie. Th de point fixe sur un compact. Problème en dim infinie.
Hirsch, Lacombe : Relativement compact, homéomorphisme sur l'ensemble triadique de Cantor. Th de Stone-Weierstrass, applications, cas complexe. Th de Riesz, Th d'Ascoli.
Pommellet : Exemples d'espaces compacts, applications, th du graphe fermé. Fonction continue et coercive. Th de Heine, exemples.
Ouvrard (Probas 1) : Th de Weierstrass(Dev).
Caldero, Germoni (H2G2) : Un homéo réalisé par l'exponentielle(Dev).
Queffélec (Topologie) : 1er et 2e th de Dini.
Rouvière : Compacts avec théorème de Cauchy-Lipschitz.

Demailly : Th de Cauchy-Arzela-Peano, exemple.
Ciarlet : Optimisation dans un Hilbert.

May 9, 2017

Vidal Agniel, *École normale supérieure de Rennes*